Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC “AVRAM IANCU”
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA „AVRAM IANCU”
## 5 APRILIE 2013
## CLASA A V-A

**SUBIECTUL I (20 puncte):**
Aflați suma numerelor naturale pare care împărțite la 98 dau restul egal cu triplul câtului.

**SUBIECTUL II (20puncte)**
Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbf{N}^*\mid 5^x\le 200\}$; $B=\{x\in\mathbf{N}\mid 3^{y+2}-3^{y+1}-5\cdot 3^y\le 200\}$
Calculați $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, A\times B$.

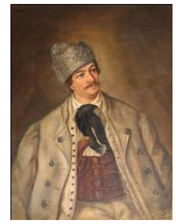
**SUBIECTUL III (20 puncte) :**
Să se arate că fracția $\dfrac{2012^{2013}+2013^{2012}}{2012^{2012}+2013^{2013}}$ este subunitară.

**SUBIECTUL IV (30puncte)**
Fie suma: $S=11+101+1001+\ldots+1\underbrace{00\ldots0}_{2000\,cifre}1.$

**a)** Calculați *S*.
**b)** Arătați că *S* nu poate fi pătrat perfect.

**Notă:**
Se acordă **10** puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC "AVRAM IANCU"
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com



**CONCURSUL DE MATEMATICĂ „AVRAM IANCU"**
**5 APRILIE 2013**
**CLASA A VI-A**

**SUBIECTUL I (20 puncte):**
Fie $A=\{(x,y)\mid 7x+3y=2013, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$. Câte elemente are mulțimea $A$?

**Subiectul II (25puncte)**
Determinați numărul $\overline{abc}$ știind că cifrele sale sunt numere prime și
$\frac{3a+2b}{6}=\frac{3b+c}{7}=\frac{a+4c}{11}$.

**SUBIECTUL III (20 puncte) :**
Dreptele $AB$ și $CD$ se intersectează în $O$, astfel încât $m\angle(AOC)=\frac{7}{11}m\angle(BOC)$.
Fie $OE\perp AB$ și $[OF$ bisectoarea unghiului $\angle BOD$. Aflați $m(\angle EOF)$.

**SUBIECTUL IV (25 puncte) :**
Fie triunghiul isoscel $ABC$ cu $(AB)\equiv(AC)$ și punctele $D,E\in BC$ astfel încât $B\in(DC), C\in(BE)$ și $(BD)\equiv(CE)$. Perpendiculara în $D$ pe $AD$ intersectează perpendiculara în $E$ pe $AE$ în punctul $F$. Să se arate că $(AF$ este bisectoarea $\angle BAC$.

**Notă:**
Se acordă **10** puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC “AVRAM IANCU”
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA “AVRAM IANCU”
## 5 APRILIE 2013
## Clasa a VII-a

**SUBIECTUL I (30 puncte):**
**Să se rezolve in mulţimea numerelor reale ecuaţia:**
$$5(2x^2+y^2)+6y(2x+1)=4x-13$$

**SUBIECTUL II (30 puncte):**
**Fie un trapez ortodiagonal in care notam cu S aria si cu $d_1, d_2$ lungimile diagonalelor.Dacă $2S \leq h\sqrt{2d_1 \cdot d_2}$, unde h este înălţimea,arătaţi că trapezul este isoscel.**

**SUBIECTUL III (30 puncte):**
**În triunghiul ABC construim înălţimile AD, D $\epsilon$ (BC), BE , E $\epsilon$ (AC), CF, F$\epsilon$ (AB).Ştiind că $DB^2+CE^2+AF^2=3$ ,demonstraţi ca p$\leq$ 3 , unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.**

**Notă:**
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC “AVRAM IANCU”
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA “AVRAM IANCU”
## 5 APRILIE 2013
## CLASA A VIII-A

**SUBIECTUL I (30 puncte):**

**a)** Verificați relația $\dfrac{k^2-k+1}{k^4+k}=\dfrac{1}{k^2+k}, \forall k\in \mathbf{N}^*$.

**b)** Calculați $\dfrac{1^2}{1^4+1}+\dfrac{2^2-1}{2^4+2}+\dfrac{3^2-1}{3^4+3}\ldots+\dfrac{2013^2-2012}{2013^4+2013}$.

**SUBIECTUL I I (30puncte)**

Funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-1\}\to\mathbf{R}$ verifică relația $2f(x)-f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$.

**a)** Arătați că: $f(0)+f(1)=1$

**b)** Calculați $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

**SUBIECTUL III (30 puncte) :**

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu $AB=2\sqrt{2}$ cm și $BC=3\sqrt{2}$ cm se ridică perpendiculara $MA=4$cm. Fie $E\in(BC)$ astfel încât $BE=\sqrt{2}$ cm.

**a)** Să se afle distanța de la $M$ la $DE$.

**b)** Dacă $P$ este mijlocul lui $MC$ să se afle tangenta unghiului dintre planele $(PED)$ și $(ABCD)$.

**Notă:**

Se acordă **10** puncte din oficiu

Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC "AVRAM IANCU"
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA "AVRAM IANCU"
## 5 APRILIE 2013
## Clasa a IX-a

**SUBIECTUL I (30 puncte):**
**Determinaţi toate funcţiile $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, strict crescătoare cu proprietatea $f^2(n) + f^2(n+1) + f\left(f(n)\right) = 2n^2 - n - 1, \forall\, n \geq 2.$**

**SUBIECTUL II (30 puncte):**
**Să se arate că: $(1 + tg1°)(1 + tg2°) \cdot \ldots \cdot (1 + tg44°) = 2^{22}$ .**

**SUBIECTUL III ( 30 puncte):**
**Fie ABC un triunghi echilateral înscris în cercul de centru O si rază R,iar M un punct pe cerc.Să se arate că $MA^2 + MB^2 + MC^2$=constant.**

**Notă:**
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC "AVRAM IANCU"
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA "AVRAM IANCU"
## 5 APRILIE 2013
## CLASA A X-A

**SUBIECTUL I (20 puncte):**

Demonstrați că :

**a)** $2^n \geq n+1, \forall n \geq 1$

**b)** $2^x > x$ și $log_2 x < x, \forall\, x > 0$

**SUBIECTUL II (20 puncte):**

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} sin^2 x + sin^2 y = 1 \\ tg^2 x + tg^2 y = 2 \end{cases}$$

**SUBIECTUL III (20 puncte):**

Să se calculeze suma: $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos(2k-1)\,x$

**SUBIECTUL IV (30 puncte):**

Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și AD, D$\in$ BC, o înălțime a sa. Din D se duc: o semidreaptă în interiorul unghiului ADB care intersectează latura AB în N și o semidreaptă în interiorul unghiului ADC care intersectează latura AC în M. Să se arate că, dacă cele două semidrepte sunt egal înclinate față de înălțimea AD, atunci dreptele BM, CN și AD sunt concurente.

**Notă:**

Se acordă **10** puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC "AVRAM IANCU"
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA "AVRAM IANCU"
## 5 APRILIE 2013
## Clasa a XI-a

**SUBIECTUL I (30 puncte):**
**Să se arate că nu există matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care**
$\det(A^2 + I_2) = 2\det(A + I_2)$

**SUBIECTUL II (30 puncte):**
**Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător cu proprietatea**
$x_n^4 - x_n^2 \geq x_n\left(x_{n+1}^3 - 4\right) + 4, \forall\, n \geq 1.$
**a). Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent**
**b). Să se afle limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ .**

**SUBIECTUL III (30 puncte):**
**Să se determine funcţiile derivabile $f: I \to (0, +\infty), I \subset \mathbb{R}, I$ –interval, ştiind că $f(0) = 1$ şi $f^3(x) + f'(x) = 0$.**

**Notă:**
Se acordă 10 puncte din oficiu
Timp de lucru 2 ore.

Ministerul Educaţiei Naționale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
LICEUL TEORETIC "AVRAM IANCU"
CATEDRA DE MATEMATICĂ
Cluj-Napoca, str. Onisifor Ghibu nr. 25
www.avramiancucluj.ro, e-mail: liceulavramiancu@yahoo.com

# CONCURSUL DE MATEMATICA "AVRAM IANCU"
## 5 APRILIE 2013
## Clasa a XII-a

1. Să se determine polinomul $P$, cu coeficienţi complecşi, pentru care

$$P(z) + P(-z) = z^2 - P(iz), (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

2. a) Fie $I_n = \int x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$. Să se stabilească o relaţie de recurenţă pentru $I_n$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t \quad x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = n!$.

3. Fie $a \in \mathbb{R}^*$și $G_a = \left\{ A_k / A_k = \begin{pmatrix} a^k & a^k - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că $(G_a, \cdot)$este grup comutativ izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$.